ANALISI DELLE SERIE STORICHE
MODELLI ARCH

Lea Petrella
Sapienza University of Rome

lea.petrella@uniroma1.it

Lezione 13

Modelli ARCH

Per i dati finanziari la volatilità è l'elemento principale da analizzare. Per fare questo modelliamo la varianza condizionata usando la storia passata per prevedere la volatilità .
Un modello ARCH(1) è definito nel seguente modo:

$$r_t = \epsilon_t$$

dove

$$\epsilon_t | \mathscr{F}_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2)$$

e

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2.$$

Dove $\mathscr{F}_{t-1}$ rappresenta il set di informazioni al tempo $t-1$
Supponiamo che $\omega > 0$ e $0 < \alpha < 1$ per la stazionarietà del processo e

la positività della varianza.

Modelli ARCH

Mostriamo che il processo r_t è un WN:

- il valore atteso incondizionato è nullo

$$\mathbb{E}(r_t) = 0.$$

We simply get the result using the law of total expectation:

$$\mathbb{E}(r_t) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(r_t|\mathscr{F}_{t-1})) = 0$$

- la varianza incondizionata è costante:

$$\begin{aligned}\sigma^2 =&\mathbb{E}(r_t^2) = \mathrm{Var}(\epsilon_t) = \mathbb{E}(\epsilon_t^2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\epsilon_t^2|\mathscr{F}_{t-1})) = \\ =&\mathbb{E}(\sigma_t^2) = \mathbb{E}(\omega + \alpha\epsilon_{t-1}^2) = \omega + \alpha\mathbb{E}(\epsilon_{t-1}^2) = \omega + \alpha\sigma^2 = \frac{\omega}{1-\alpha}\end{aligned}$$

- correlazione nulla

$$Cov(r_t, r_{t-h}) =\mathbb{E}(\epsilon_t\epsilon_{t-h}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\epsilon_t\epsilon_{t-h}|\mathscr{F}_{t-1})) = \mathbb{E}(\epsilon_{t-h}\mathbb{E}(\epsilon_t|\mathscr{F}_{t-1})) =$$

Modelli ARCH

A causa della covarianza nulla r_t non può essere previsto usando la storia passata $\mathscr{F}_{t-1}$. Si noti bene che questo non vuol dire che gli r_t siano indipendenti. Infatti si può dimostrare che $Cov(r_t^2, r_{t-h}^2) \neq 0$

- r_t ha distribuzionne leptocurtica nonostante l'assunzione di normalità . Per calcolare il comportamento delle code è necessario conoscere il momento quarto. Nel caso di una distribuzione Gaussiana è noto il seguente risultato

$$\mathbb{E}(\epsilon_t^4 | \mathscr{F}_{t-1}) = 3[\mathbb{E}(\epsilon_t^2 | \mathscr{F}_{t-1})]^2$$

  da cui segue che

$$\begin{aligned}
\mu_4 =& \mathbb{E}(r_t^4) = \mathbb{E}(\epsilon_t^4) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\epsilon_t^4 | \mathscr{F}_{t-1})) = \mathbb{E}(3\mathbb{E}(\sigma_t^2 | \mathscr{F}_{t-1})^2) = \\
=& 3\mathbb{E}(\omega + \alpha\epsilon_{t-1}^2)^2 = 3\mathbb{E}(\omega^2 + \alpha^2\epsilon_{t-1}^4 + 2\omega\alpha\epsilon_{t-1}^2) = \\
=& 3\omega^2 + 3\alpha^2\mathbb{E}(\epsilon_{t-1}^4) + 6\omega\alpha\mathbb{E}(\epsilon_{t-1}^2) \\
&\implies \mu_4 = 3\omega^2 + 3\alpha^2\mu_4 + 6\omega\alpha\frac{\omega}{1-\alpha}
\end{aligned}$$

Modelli ARCH

Da cui si ricava che

$$\mu_4 = \frac{3\omega^3(1+\alpha)}{(1-\alpha)(1-3\alpha^2)}$$

La curtosi può quindi essere calcolata nel seguente modo:

$$Kurt = \frac{\mathbb{E}(\epsilon_t^4)}{\mathbb{E}(\epsilon_t^2)^2} = 3\frac{1-\alpha^2}{1-3\alpha^2} \geq 3$$

Per ciò che concerne l'asimmetria si ha che:

- skewness
$$\mu_3 = \mathbb{E}(r_t^3) = \mathbb{E}(\epsilon_t^3) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\epsilon_t^3|\mathscr{F}_{t-1}) = 0$$

In generale si può dimostrare che ogni momento di ordine dispari risulta nullo.

Modelli ARCH

- dalla fomalizzazione di un processo ARCH si può osservare che shocks grandi implicano una varianza condizionata elevata. Per questo motivo il rendimento r_t tende ad assumere valori grandi. Questo significa che sotto l'assunzione di un modello ARCH rendimenti elevati tendono ad essere seguiti da rendimenti elevati (e viceversa). Uso la parola tendono in quanto non necessariamente una varianza elevata produce realizzazioni elevate dei rendimenti. In pratica si afferma che la probabilità di ottenere un valore elevato è maggiore di ottenerne uno piccolo. Questa caratteristica è assimilabile al volatility clustering osservato per i rendimenti finanziari.

Modelli ARCH

Si può dimostrare che un processo ARCH(1) ha una rappresentazione nella classe dei modelli ARMA, in particolare ha una rappresentazione AR(1) del tipo:

$$r_t^2 = \omega + \alpha r_{t-1}^2 + v_t$$

dove v_t è un WN tale per cui

$$\mathbb{E}(v_t) = 0$$

$$\mathrm{Var}(v_t) = \frac{2\omega(1+\alpha)}{(1-\alpha)(1-3\alpha^2)}$$

e

$$Cov(v_t, v_{t-h}) = 0$$

Modelli ARCH

con

$$E(r_t^2) = \frac{\omega}{1-\alpha}$$

$$Var(r_t^2) = \frac{2\omega^2}{(1-\alpha)^2(1-3\alpha^2)}$$

$$\rho_{r^2}(h) = Corr(r_t^2, r_{t-h}^2) = \alpha^h$$

che decade a zero a seconda dei valori di α

Modelli ARCH

In generale un modello ARCH(p) può essere scritto nel seguente modo:

$$r_t = \epsilon_t$$

dove

$$\epsilon_t | \mathscr{F}_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2)$$

e

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \epsilon_{t-j}^2.$$

con $\omega > 0$ e $\alpha_j \geq 0 \ \forall j$ per assicurare che la varianza condizionata sia positiva.

Se $\sum_{j=1}^{p} < 1$ allora il processo ARCH(p) è debolmente stazionario.

Limiti dei modelli ARCH

- il modello assume che shocks positivi e negativi hanno stesso effetto sulla volatilit‘a in quanto questa dipende dagli shocks precedenti al quadrato. In realtà è noto che i prezzi reagiscono in modo differente a shocks positivi e negativi (EGARCH, TGARCH).
- nelle serie storiche finanziarie i volatility clusters hanno una durata tale da rendere necessari modelli ARCH(p) con p elevato (GARCH)
- i modelli ARCH eccedono nella previsione della volatilit‘a perch‘e si può dimostrare che rispondono lentamente a elevati ed isolati shocks